

**HOJA 1: MATRICES. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES****Matrices**

1) Dada la matriz  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , pruebe que  $M^2 = 2^{n-1}M$ .

2) Demuestre la siguiente implicación:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{n-1} \Rightarrow A^n = 0$$

3) Demuestre que la matriz triangular superior por bloques  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ , donde A y B son matrices cuadradas, es regular si y sólo si A y B son regulares. En este caso, halle la matriz inversa de M

4) Encuentre una sucesión de matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_k$  tal que  $E_k \dots E_2 E_1 A$  sea la matriz escalonada de A, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 8 & 10 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

5) Halle, por el procedimiento de Gauss-Jordan, la inversa, si existe, de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Halle el rango, mediante la reducción de matrices, de las matrices

$$A_n = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & 1 \\ 1 & n+1 & 1 \\ 1 & 1 & n+1 \end{pmatrix} \quad B_n = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & n \\ 1 & n+1 & 1 \\ 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix}, \text{ según los valores del parámetro real } n.$$

7) ¿Qué condición debe cumplir el parámetro real k para que  $\text{rg}(A+kB) < 2$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

**Sistemas de Ecuaciones Lineales**

8) Estudie, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, la compatibilidad de los siguientes sistemas según los distintos valores de los parámetros reales. Resuelva, cuando sea posible, los que dependan de un único parámetro.

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = k \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} a^2x + ay + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + ay + a^2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ ax + y + bz = 1 \\ ax + y + z = b \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b - 1)y + z = 1 \\ ax + by + (b + 3)z = 2b - 1 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x + y + z + at = -1 \\ x + y + az + t = 1 \\ x + ay + z + t = -1 \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

9) Resuelva, por el método de eliminación de Gauss, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 2x + y - z = 6 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 9y - 5z = 0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + y + z + t = -2 \\ x - y - z + t = -4 \\ x - y + z + t = -6 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3x + y - z = 10 \\ x - 2y - z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x - y - 3z = 7 \end{cases}$$

10) ¿Para qué valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son compatibles los sistemas siguientes? Resolverlos para dichos valores

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y + z = 2\alpha \\ 4x + 2y + 2z = 3\alpha \\ 6x + 2y + 3z = 2\beta \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + 5y - 3z = \alpha \\ 4x + 7y + 4z = \beta \\ -6x + 3y + z = \gamma \end{cases}$$

11) Elimine los parámetros en las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 = 1 + a \\ x_2 = 2 + a \\ x_3 = 1 - 3a \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 = 1 - 3a + b \\ x_2 = a - 2b \\ x_3 = 2 + b \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = c \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x_1 = a + 2b - c \\ x_2 = a - b \\ x_3 = 3b \\ x_4 = b + c \\ x_5 = a - b + 2c \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} x_1 = a + b + 2c \\ x_2 = a + 2b + 3c \\ x_3 = a + c \\ x_4 = 0 \\ x_5 = a - b \end{cases}$$

12) Encuentre todos los polinomios  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , con coeficientes reales tales que:

$$\text{a) } p(1) = 2, \quad p(-1) = 4, \quad p(3) = 16 \quad \text{b) } p(1) = 0, p(-1) = 0.$$

**Ecuaciones matriciales**

13) Obtenga todas las matrices  $B \in M_{2 \times 2}$  que conmutan con la matriz  $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

14) Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$ ; halle el subconjunto  $S = \{B \in M_{2 \times 2} ; AB = \mathbf{0}\}$ , según el valor del parámetro real  $m$ .

15) Resuelva la ecuación matricial  $Ax = b$ , donde  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .